Eingesendete Abhandlung.

Über eine indirecte Methode, die Inclination zu bestimmen.

Von Wenzel Zenger,
prov. Lehrer der Physik am Gymnasium zu Neusohl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. December 1854.)

1.

Die Schwierigkeiten, welche der genauen Bestimmung der Inclination durch die Schwingungsmethode und an Inclinatorien entgegenstehen, veranlassen, dass die Resultate dieser Beobachtungen in der Genauigkeit weit jenen der Declinations-Beobachtungen nachstehen; es scheint daher bei der grossen Anzahl magnetischer Beobachtungen, die nun an vielen Orten angestellt werden, nicht ohne Interesse zu sein, durch Aufsuchung anderer, wenn auch indirecter Methoden, eine grössere Genauigkeit hierin anzustreben.

Eine solche indirecte Methode, die Inclination aufzusuchen, bietet die Vergleichung der horizontalen und verticalen Intensität des Erdmagnetismus mittelst der Sinus- oder Tangentenboussole dar. Es ist hierzu blos erforderlich, den Boussolen eine solche Einrichtung zu geben, dass man die Nadel sowohl in eine vollkommen horizontale Ebene, als auch in jene Lage bringen könne, wo blos die verticale Componente des Erdmagnetismus wirkt, und die Nadel sich senkrecht auf die Ebene des Schliessungsleiters um ihre Axe drehe. Bekanntlich findet zwischen Stromstärke S, Ablenkungswinkel α und der Intensität der horizontalen Componente H die Beziehung $S = H tg.\, \alpha$ oder $S = H \sin \alpha$ statt, je nachdem man eine Tangenten- oder Sinusboussole gebraucht. Ganz analog lässt sich auch für die Verticalstellung der Nadel die Relation $S = V tg.\, \alpha$ oder $S = V \sin \alpha$ nachweisen. Es stelle Fig. 1, MM_1 den Stromleiter einer Tangentenboussole, NS die Nadel in ihrer um α aus dem Meridiane abgelenkten Lage dar, so greifen an dem Pole der Nadel zwei Kräfte an, die eine parallel zur Ebene des Schliessungsleiters, und mit der Intensität der verticalen Componente nach der Richtung Ny, die andere senkrecht zu dieser Ebene in der Richtung Nx. Zerlegt man diese beiden Kräfte in die auf einander senkrechten Componenten $N\eta$, $y\eta$ und $N\xi$, $x\xi$, so muss im Zustande des Gleichgewichtes $N\eta = N\xi$ sein.

Nun ist aber

Fig. 1.

$$N\eta = Ny \sin \alpha$$

und

$$N\xi = Nx \cos \alpha,$$

woraus

$$Nx = Ny \; tg. \, \alpha \tag{1}$$

folgt, setzt man

$$Nx = S, \; Ny = V,$$

so ergibt sich

$$S = V \, tg. \, \alpha.$$

Ganz auf ähnliche Weise lässt sich

$$S = V \sin \alpha \tag{2}$$

nachweisen für den Fall einer Sinusboussole. Durch einen Doppelversuch an einer solchen Boussole wird man daher bei bekanntem oder constantem Verhältnisse der Stromstärken, leicht das Verhältniss der horizontalen und verticalen Componente ausmitteln können. Am sichersten ist es denselben Strom zu benützen, indem Mittel genug zu Gebote stehen, der Unveränderlichkeit desselben innerhalb der kurzen Beobachtungsdauer sich zu versichern. Dann wird offenbar $H \, tg. \, \alpha = V \, tg. \, \alpha'$ oder $H \sin \alpha = V \sin \alpha'$, woraus

$$\frac{V}{H} = \frac{tg. \, \alpha}{tg. \, \alpha'} \text{ und } \frac{V}{H} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}$$

folgt, da aber $V = T \sin i$, $H = T \cos i$ ist, wo i den Inclinationswinkel bedeutet, so findet man

$$tg. \, i = \frac{tg. \, \alpha}{tg. \, \alpha'} \text{ und } tg. \, i = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}. \tag{3}$$

Nachdem das Princip dieser Methode erläutert worden, ist es nöthig die Fehlerquellen näher zu untersuchen, um ihren Einfluss auf die Resultate und die durch diese Methode erreichbare Genauigkeit

beurtheilen, und erstere möglichst verringern zu können. Setzt man voraus, dass die Apparate mit jener Sorgfalt gearbeitet sind, auf die jedes genaue Messinstrument Anspruch machen muss, so bleiben doch drei unveränderliche Fehlerquellen theils der Beobachtung selbst, theils in der Unvollkommenheit der Apparate gelegen. Der eine dieser Fehler ist der Beobachtungsfehler bei der Ablesung des Kreises, der zweite in der Einstellung der Nadelebene in eine vollkommen horizontale, oder verticale Lage, der dritte endlich liegt in der praktischen Unmöglichkeit eine Nadel genau zu äquilibriren, wodurch die Ablenkungswinkel bald vergrössert, bald verkleinert werden.

Betrachten wir zuerst die Fehler in der Ablesung, und ihren Einfluss auf das Endresultat, so gibt die Differentiirung der Gleichungen 3. für die Sinusboussole:

$$\frac{di}{d\alpha} = \frac{sin\,(\alpha - \alpha')}{sin^2\,\alpha}\,cos^2\,i, \qquad (4)$$

für die Tangentenboussole

$$\frac{di}{d\alpha} = \frac{cos\,(\alpha + \alpha')\,sin\,(\alpha - \alpha')}{cos^2\,\alpha\,sin^2\,\alpha'} \qquad (5)$$

wo die Änderungen $d\alpha = d\alpha'$ angenommen wurden.

Diese Ausdrücke zeigen, dass der Einfluss eines Ablesungsfehlers mit dem Quadrate des Cosinus des Inclinationswinkels, also sehr rasch abnimmt. Für die Tangentenboussole wird sich gleich ein Minimum dieses Einflusses durch eine geeignete Wahl der Stromstärke erzielen lassen, setzt man nämlich $\frac{di}{d\alpha} = 0$, so wird $cos(\alpha + \alpha')$ $sin(\alpha - \alpha') = 0$, und dies führt auf $cos\,(\alpha + \alpha') = 0$, welche Bedingungsgleichung mit $tg.\,i = \frac{tg.\,\alpha}{tg.\,\alpha'}$, combinirt auf

$$tg.\,\alpha = \sqrt{tg.\,i} \text{ oder } tg.\,\alpha' = \frac{1}{\sqrt{tg.\,i}} = \sqrt{cot.\,i}$$

führt.

Nimmt man z. B. an, die genähert bekannte Inclination eines bestimmten Ortes sei 62°, so ergibt sich $tg.\alpha' = tg.\,34^0 10'$, wählt man den Strom von solcher Intensität, dass er nahezu diese Ablenkung an der verticalen Boussole hervorbringt, so findet man an der horizontalen z. B. $tg.\alpha = tg.\,53^0 54'$, woraus $tg.\ i = 63^0 40'$ folgt. Berechnet man hiermit den Differentialquotienten $\frac{di}{d\alpha}$, so findet man $\frac{di}{d\alpha} = 0{\cdot}0108$. Da man bei jeder grösseren Boussole 0°1 noch schätzen

kann, so wird $di = 0^\circ\!.00108 = 3''\!.89$ nicht übersteigen. Wiederholte Versuche werden offenbar die Resultate noch genauer machen.

Der Fehler wird daher nie von bedeutendem Einflusse auf Messungen mit der Tangentenboussole sein können, da man es in der Macht hat ihn unmerklich zu machen; nicht dasselbe gilt von der Sinnusboussole, denn für diese lässt sich die Bedingungsgleichung $sin(\alpha - \alpha') = 0$ nur für den Fall erfüllen, dass $\alpha = \alpha'$ d. h. $tg.i = 1$ oder $i = 45^0$; im Allgemeinen, wird jedoch der Fehler um so geringer, je grösser die Ablenkungswinkel werden, die man hier aber auch der Genauigkeit unbeschadet beliebig gross nehmen kann. Ein relatives Minimum erreicht $\frac{di}{d\alpha}$ für $\alpha = 90^0$, wo dann $\frac{di}{d\alpha} = cos\,\alpha' cos^2 i$ ist, woraus die rasche Abnahme des Werthes des Differentialquotienten für grosse Ablenkungswinkel und bedeutende Inclination ersichtlich wird.

3.

Der Fehler in der Einstellung der Nadelebene wird sich durch die vollkommenen Mittel der Ausführung, welche jetzt zu Gebote stehen, sehr leicht auf ein unmerkliches herabbringen lassen, jedenfalls wird man als die möglichen Grenzwerthe dieser Genauigkeit $0^\circ\!.5$ und $0^\circ\!.1$ anzunehmen vollkommen berechtigt sein.

Liegt die Nadelebene genau im magnetischen Meridiane, so wirkt die Totalkraft des Erdmagnetismus auf die Nadel, dreht man aber die Nadel aus der Meridianebene heraus, so wird ein um so grösserer, dem Sinus des Winkels der Vertical- und Meridianebene proportionaler Theil der horizontalen Componente aufgehoben, je grösser die Drehung wird. Es bleibt daher blos der dem Cosinus des Winkels proportionale Theil der horizontalen Componente übrig, nennt man diesen Winkel β, die wirkende Kraft des Erdmagnetismus T, so ist

$$T'^2 = V^2 + H\,cos^2\beta = T^2\,(sin^2 i + cos^2 i\,cos^2\beta);$$

ebenso findet man bei nicht genau horizontaler Lage der Nadelebene

$$T''^2 = V\,cos\,\beta' + H = T^2\,(sin^2 i\,cos^2\beta' + cos^2 i).$$

Ist daher die Einstellung um die Winkel $90 - \beta$, $90 - \beta'$ fehlerhaft, so ist in der Formel

$$\frac{V}{H} = tg.\,i,\ \text{für } V,\ T' \text{ für } H,\ T''$$

zu setzen, und daher $\frac{T'}{T''} = tg.\, i'$ und

$$tg.\, i' = \sqrt{\frac{sin^2\, i + cos^2\, i\, cos^2\, \beta}{cos^2\, i + sin^2\, i\, cos^2\, \beta'}} = \frac{tg.\, \alpha}{tg.\, \alpha'}$$

oder

$$tg.\, i = \sqrt{\frac{sin^2\, i + cos^2\, i\, cos^2\, \beta}{cos^2\, i + sin^2\, i\, cos^2\, \beta'}} = \frac{sin\, \alpha}{sin\, \alpha'} \tag{6}$$

Diese Gleichungen kann man auch

$$tg.\, i' = tg.\, i \sqrt{\frac{1 + cot^2\, i\, cos^2\, \beta}{1 + tg.^2\, i\, cos^2\, \beta'}} = \frac{tg.\, \alpha}{tg.\, \alpha'}$$

oder

$$tg.\, i' = tg.\, i \sqrt{\frac{1 + cot^2\, i\, cos\, \beta}{1 + tg.^2\, i\, cos\, \beta'}} = \frac{sin\, \alpha}{sin\, \alpha'}$$

schreiben. Nimmt man beide Einstellungen gleich fehlerhaft an, so wird $tg.\, i = tg.\, i'$, wenn $i = 45^0$ ist; weil dann $cot\, i = tg.\, i$ und daher

$$\sqrt{\frac{1 + cot^2\, i\, cos^2\, \beta}{1 + tg.^2\, i\, cos^2\, \beta'}} = 1$$

wird.

Für die mittlere Inclination wird daher der Einfluss dieses Fehlers ein Minimum.

Sucht man wieder aus (6) die Bedingungsgleichung für die geringste Abweichung im Resultate bei fehlerhafter Einstellung, so erhält man durch Differentiation, indem man

$$\frac{tg.\, \alpha'}{tg.\, \alpha} = c, \quad \frac{sin\, \alpha'}{sin\, \alpha} = c',$$

als constant und fehlerfrei annimmt;

$(cos^2\, i + sin^2\, i\, cos\, \beta)\, (2\, sin\, i\, cos\, i\, di. - 2\, sin\, i\, cos\, i\, cos^2\, \beta\, di - 2\, cos^2\, i\, sin\, \beta\, cos\, \beta\, d\beta) - (sin^2\, i + cos^2\, i\, cos^2\, \beta)\, [-2\, sin\, i\, cos\, i\, di + 2\, sin\, i\, cos\, i\, cos^2\, \beta\, di - 2\, sin^2\, i\, cos\, \beta\, sin\, \beta\, d\, \beta] = 0,$

welcher Ausdruck reducirt

$$\frac{di}{d\beta} = \frac{(cos^2\, i - c^2\, sin^2\, i)\, sin^2\, \beta}{(1 + c^2)\, sin^2\, \beta\, sin\, 2i}$$

oder

$$\frac{di}{d\beta} = \frac{(cos^2\, i - c'\, sin^2\, i)\, sin\, 2\beta}{(1 + c'^2)\, sin^2\, \beta\, sin\, 2i}$$

gibt. Hieraus folgt, wenn $\frac{di}{d\beta} = 0$ angenommen wird:

$$\cos^2 i - c^2 \sin^2 i = 0 \text{ und } \cos^2 i - c' \sin^2 i = 0,$$

hieraus

$$c = tg.\, i \quad \text{und} \quad c' = tg.\, i$$

daher

$$\frac{tg.\, a}{tg.\, a'} = tg.\, i \text{ und } \frac{\sin a}{\sin a'} = tg.\, i$$

die Bedingung des geringsten Einflusses ausdrücken, da diese Gleichungen identisch sind mit jenen, aus welchen i gefunden wird, so umfasst diese Methode den für die Genauigkeit des Resultates vortheilhaftesten Fall.

Um den Einfluss dieses Fehlers auf das Endresultat ersichtlich zu machen, folgen für verschiedene Inclinationen die Änderungen di, berechnet für die oben angenommenen beiden Grenzwerthe $da = 0^\circ\!.5$ und $da' = 0^\circ\!.1$, indem man den ersteren, als den noch zulässigen, den letzteren, als den leicht erreichbaren Grad der Genauigkeit in der Einstellung betrachten kann.

i	di		i	di	
	$da = 0^\circ\!.5$	$da' = 0^\circ\!.1$		$da = 0^\circ\!.5$	$da' = 0^\circ\!.1$
1°	+ 14′ 59″	+ 1′ 24″	50°	— 0′ 6″	— 0′ 0·5″
5	2 58	0 16	60	0 18	0 2
10	1 17	0 8	70	0 38	0 4
20	0 38	0 4	80	1 26	0 8
30	0 18	0 2	85	2 57	0 17
40	0 6	0 0·5	89	12 0	1 22

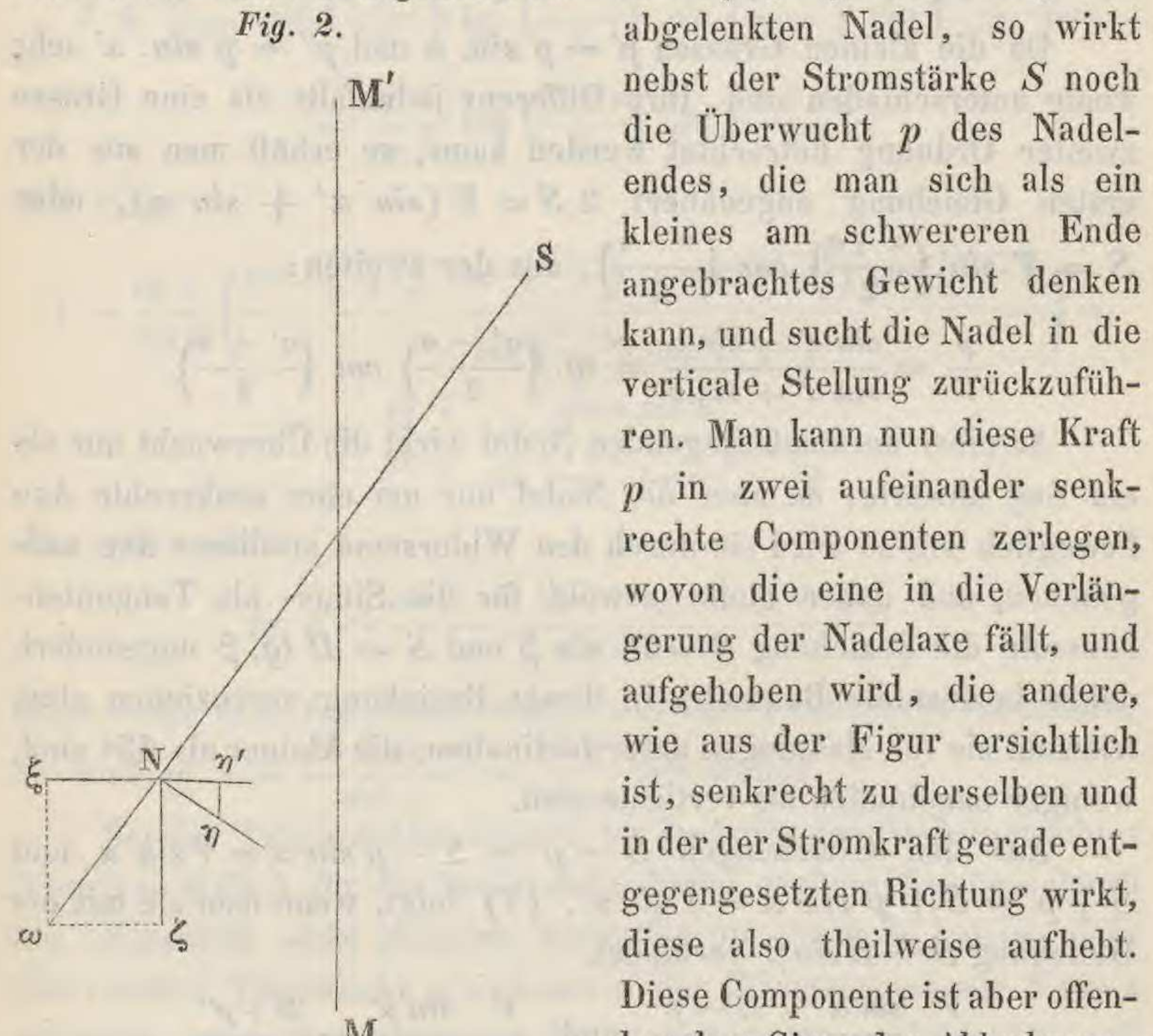
4.

Die vorstehenden Betrachtungen setzen voraus, dass auf die Nadel keine anderen Kräfte als die Stromkraft und der Erdmagnetismus wirken, was jedoch nur dann richtig ist, wenn die Magnetnadel vollkommen äquilibrirt ist, d. h. ihr Schwerpunkt mit der Umdrehungsaxe zusammenfällt. Da jedoch diese Bedingung auch nicht nahe genug sich praktisch durchführen lässt, so müssen die Beobachtungen von dem Einflusse befreit werden, den die Überwucht eines Nadelendes auf dieselben ausübt.

Hierzu gibt es zwei Wege, entweder sucht man, wie dies bei den Beobachtungen an Inclinatorien der Fall ist, durch das Beobachtungsverfahren diesen Einfluss zu beseitigen, indem man mit umgekehrtem Magnetismus der Nadel den Versuch wiederholt, oder denselben für jede Beobachtung berechnet, was wohl besonders bei sehr genauen Versuchen das Rathsamste ist.

Die Wirkung der Überwucht wird offenbar dadurch sich äussern, dass sie am Nadelende, wie an einem Hebelarme angreifend, die Wirkung der Stromkraft bald vermindern, bald vermehren wird. Um dies deutlicher zu machen, wollen wir zuerst den Fall der Sinusboussole betrachten, wenn die Nadel vertical steht, und das schwerere Nadelende nach unten gekehrt ist. Ist in (Fig. 2) *NS* die Lage der abgelenkten Nadel, so wirkt nebst der Stromstärke S noch die Überwucht p des Nadelendes, die man sich als ein kleines am schwereren Ende angebrachtes Gewicht denken kann, und sucht die Nadel in die verticale Stellung zurückzuführen. Man kann nun diese Kraft p in zwei aufeinander senkrechte Componenten zerlegen, wovon die eine in die Verlängerung der Nadelaxe fällt, und aufgehoben wird, die andere, wie aus der Figur ersichtlich ist, senkrecht zu derselben und in der der Stromkraft gerade entgegengesetzten Richtung wirkt, diese also theilweise aufhebt. Diese Componente ist aber offenbar dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional, bezeichnen wir sie mit p', so ist $p' = p \sin \alpha$; man kann die Sache also so auffassen, als ob nicht die ganze Stromkraft S, sondern nur $S - p'$ am Nadelende wirken würde; man erhält dann die Bezeichnung $S - p' = V \sin \alpha$ für den Zustand des Gleichgewichtes.

Fig. 2.



woraus

$$tg.\, i = \frac{tg.\, \beta\, sin\,(\alpha' + \alpha)}{2\, sin\, \alpha\, sin\, \alpha'}, \text{ und } \frac{p}{V} = \frac{sin\,(\alpha' - \alpha)}{cos\, \alpha\, cos\, \alpha'}$$

sich ergibt; wird $\alpha = \alpha'$, so folgt

$$tg.\, i = \frac{2\, tg.\, \beta\, sin\, \alpha\, cos\, \alpha}{2\, sin\, \alpha\, sin\, \alpha} = \frac{tg.\, \beta}{tg.\, \alpha}.$$

Hat man daher durch einen Vorversuch für eine bestimmte Sinus- oder Tangentenboussole ausgemittelt, welches Ende das schwerere ist und kennt man daher das Verhältniss $\frac{p}{V}$, so kann man für jeden künftigen Versuch diese Correction anbringen, ohne erst den Nadelmagnetismus umkehren zu müssen. Da für die Correction $S = V sin\, \alpha$ oder $S = V tg.\, \alpha$ einen hinreichend genauen Werth zur Berechnung von $\frac{p}{V}$ gibt, so ist die genaue Formel für die Sinusboussole

$$1 \pm \frac{p}{S}\, sin\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) = 1 \pm \frac{p}{V}\, \frac{sin\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)}{sin\, \alpha} =$$

$$= \frac{tg.\, i}{sin \beta}\, sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right),$$

oder

$$tg.\, i = \left(1 \pm \frac{p}{V}\, \frac{sin\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)}{sin\, \alpha}\right) \frac{sin\, \beta}{sin\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)} =$$

$$(9) \qquad = \frac{sin\, \beta}{sin\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)} \pm \frac{p}{V}\, \frac{tg.\, \frac{\alpha'-\alpha}{2}\, cot\, \frac{\alpha'+\alpha}{2}}{sin\, \alpha},$$

wo das obere Zeichen für das nach oben gerichtete schwerere Ende gilt.

Dieser Ausdruck zeigt, dass der Einfluss der Überwucht um so mehr verschwindet, je näher $cot(\alpha' + \alpha) = 0$, d. h. $\alpha' + \alpha = 90^{\circ}$ wird, daher man vortheilhaft mit starken Ablenkungen experimentirt, wodurch zugleich auch die übrigen Fehler sich verringern. Für die Tangentenboussole findet man

$$\frac{p}{S} = \frac{p}{V\, tg.\, \alpha} = \frac{sin\,(\alpha' - \alpha)}{sin\, \alpha\, cos\, \alpha'},$$

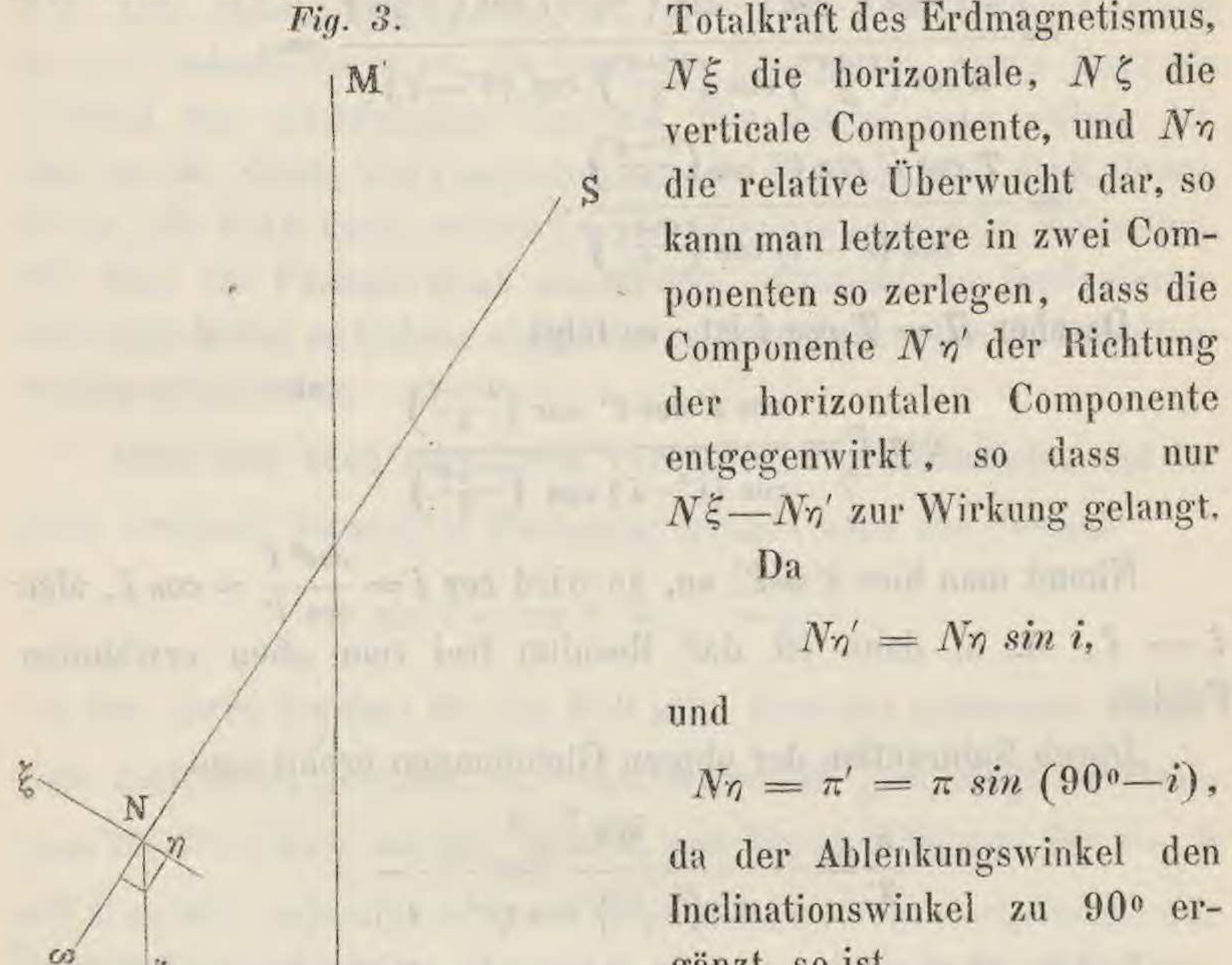
und daher

$$(10) \qquad tg.\, i = \left(1 \pm \frac{p}{V}\, \frac{sin\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)}{sin\, \alpha\, cos\, \alpha'}\right) \frac{tg.\, \beta}{tg.\, \alpha}$$

5.

Um den Einfluss der Überwucht eines Nadelendes auch für das Inclinatorium zu berechnen, stelle (Fig. 3) $N\omega$ die Richtung der Totalkraft des Erdmagnetismus, $N\xi$ die horizontale, $N\zeta$ die verticale Componente, und $N\eta$ die relative Überwucht dar, so kann man letztere in zwei Componenten so zerlegen, dass die Componente $N\eta'$ der Richtung der horizontalen Componente entgegenwirkt, so dass nur $N\xi - N\eta'$ zur Wirkung gelangt.

Fig. 3.



Da

$$N\eta' = N\eta \sin i,$$

und

$$N\eta = \pi' = \pi \sin (90^0 - i),$$

da der Ablenkungswinkel den Inclinationswinkel zu 90° ergänzt, so ist

$$N\eta' = N\eta \sin i = \pi' \sin i = \pi \sin i \cos i \text{ oder } N\eta' = \frac{\pi}{2} \sin 2\,i.$$

Statt der horizontalen Componente wirkt daher die Kraft $H' = H - \frac{\pi}{2} \sin 2\,i$, und man wird daher einen von i abweichenden Werth i' erhalten. Da aber $H' = T \cos i'$, so ist $H - \frac{\pi}{2} \sin 2\,i' = T \cos i'$.

Ist das obere Ende schwerer, so ist $H'' = T \cos i''$ oder $H - \frac{\pi}{2} \sin 2\,i'' = T \cos i''$; woraus

$$\frac{2\,H}{\sin 2\,i'} - \pi = \frac{2\,T \cos i'}{\sin 2\,i'}, \text{ und } \frac{2\,H}{\sin 2\,i''} + \pi = \frac{2\,T \cos i''}{\sin 2\,i''}$$

folgt; addirt man beide Gleichungen, so folgt:

$$2\,H\left(\frac{1}{\sin 2\,i''} + \frac{1}{\sin 2\,i'}\right) = 2\,T\left(\frac{\cos i''}{\sin 2\,i''} + \frac{\cos i'}{\sin 2\,i'}\right);$$

woraus

$$tg.\, i = \frac{tg.\, \beta \; sin\, (\alpha' + \alpha)}{2\, sin\, \alpha\; sin\, \alpha'}, \text{ und } \frac{p}{V} = \frac{sin\, (\alpha' - \alpha)}{cos\, \alpha\; cos\, \alpha'}$$

sich ergibt; wird $\alpha = \alpha'$, so folgt

$$tg.\, i = \frac{2\, tg.\, \beta\; sin\, \alpha\; cos\, \alpha}{2\; sin\, \alpha\; sin\, \alpha} = \frac{tg.\, \beta}{tg.\, \alpha}.$$

Hat man daher durch einen Vorversuch für eine bestimmte Sinus- oder Tangentenboussole ausgemittelt, welches Ende das schwerere ist und kennt man daher das Verhältniss $\frac{p}{V}$, so kann man für jeden künftigen Versuch diese Correction anbringen, ohne erst den Nadelmagnetismus umkehren zu müssen. Da für die Correction $S = V sin\, \alpha$ oder $S = V tg.\, \alpha$ einen hinreichend genauen Werth zur Berechnung von $\frac{p}{V}$ gibt, so ist die genaue Formel für die Sinusboussole

$$1 \pm \frac{p}{S}\, sin\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) = 1 \pm \frac{p}{V}\, \frac{sin\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)}{sin\, \alpha} =$$
$$= \frac{tg.\, i}{sin \beta}\, sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right),$$

oder

$$tg.\, i = \left(1 \pm \frac{p}{V}\, \frac{sin\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)}{sin\, \alpha}\right) \frac{sin\, \beta}{sin\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{sin\, \beta}{sin\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)} \pm \frac{p}{V}\, \frac{tg.\, \frac{\alpha'-\alpha}{2}\; cot\, \frac{\alpha'+\alpha}{2}}{sin\, \alpha}, \tag{9}$$

wo das obere Zeichen für das nach oben gerichtete schwerere Ende gilt.

Dieser Ausdruck zeigt, dass der Einfluss der Überwucht um so mehr verschwindet, je näher $cot(\alpha' + \alpha) = 0$, d. h. $\alpha' + \alpha = 90^0$ wird, daher man vortheilhaft mit starken Ablenkungen experimentirt, wodurch zugleich auch die übrigen Fehler sich verringern. Für die Tangentenboussole findet man

$$\frac{p}{S} = \frac{p}{V\, tg.\, \alpha} = \frac{sin\, (\alpha' - \alpha)}{sin\, \alpha\; cos\, \alpha'},$$

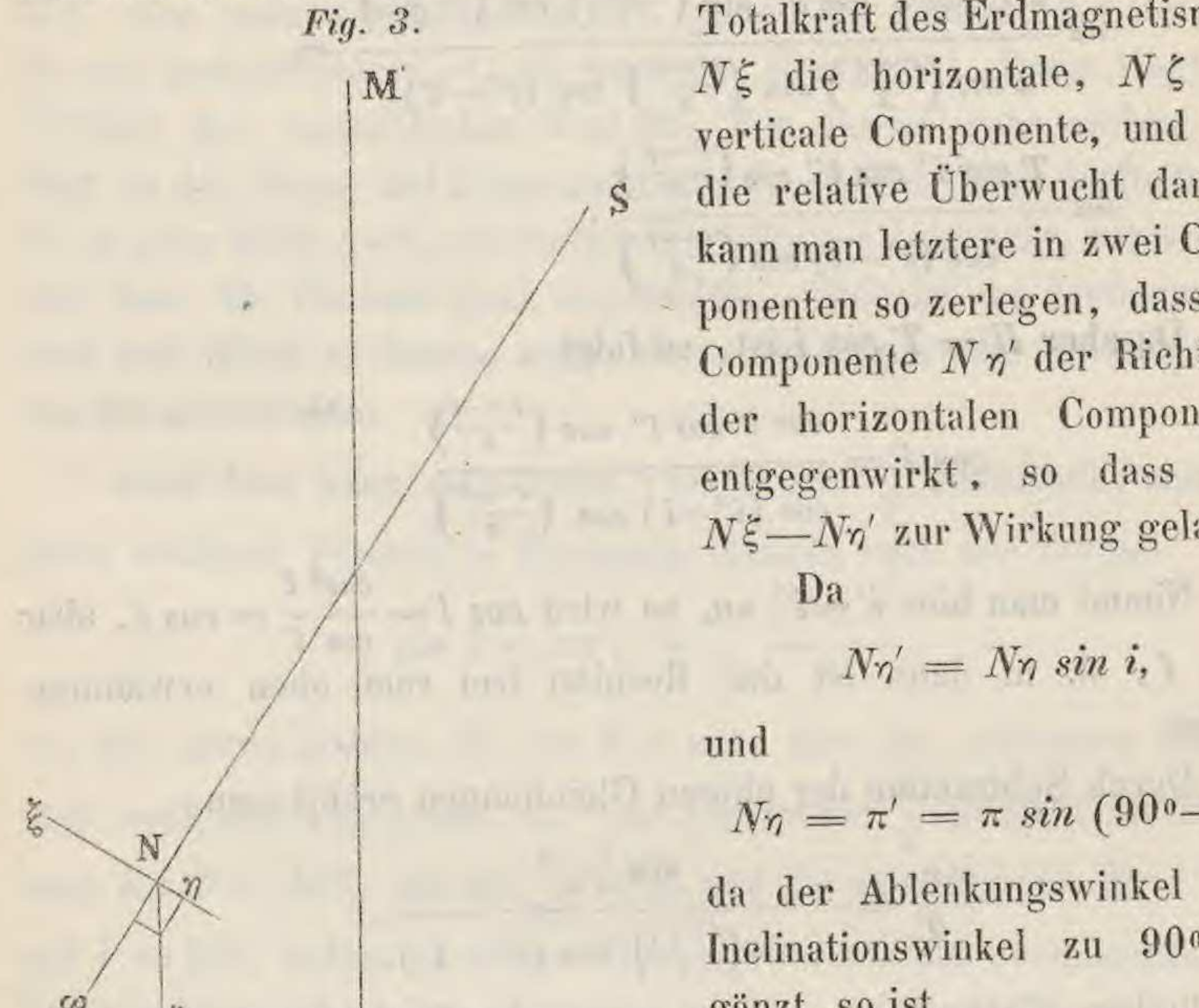
und daher

$$tg.\, i = \left(1 \pm \frac{p}{V}\, \frac{sin\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)}{sin\, \alpha\; cos\, \alpha'}\right) \frac{tg.\, \beta}{tg.\, \alpha} \tag{10}$$

5.

Um den Einfluss der Überwucht eines Nadelendes auch für das Inclinatorium zu berechnen, stelle (Fig. 3) $N\omega$ die Richtung der Totalkraft des Erdmagnetismus, $N\xi$ die horizontale, $N\zeta$ die verticale Componente, und $N\eta$ die relative Überwucht dar, so kann man letztere in zwei Componenten so zerlegen, dass die Componente $N\eta'$ der Richtung der horizontalen Componente entgegenwirkt, so dass nur $N\xi - N\eta'$ zur Wirkung gelangt.

Fig. 3.



Da

$$N\eta' = N\eta \sin i,$$

und

$$N\eta = \pi' = \pi \sin (90^0 - i),$$

da der Ablenkungswinkel den Inclinationswinkel zu 90^0 ergänzt, so ist

$$N\eta' = N\eta \sin i = \pi' \sin i = \pi \sin i \cos i \text{ oder } N\eta' = \frac{\pi}{2} \sin 2\, i.$$

Statt der horizontalen Componente wirkt daher die Kraft $H' = H - \frac{\pi}{2} \sin 2\, i$, und man wird daher einen von i abweichenden Werth i' erhalten. Da aber $H' = T \cos i'$, so ist $H - \frac{\pi}{2} \sin 2\, i' = T \cos i'$.

Ist das obere Ende schwerer, so ist $H'' = T \cos i''$ oder $H - \frac{\pi}{2} \sin 2\, i'' = T \cos i''$; woraus

$$\frac{2\, H}{\sin 2\, i'} - \pi = \frac{2\, T \cos i'}{\sin 2\, i'}, \text{ und } \frac{2\, H}{\sin 2\, i''} + \pi = \frac{2\, T \cos i''}{\sin 2\, i''}$$

folgt; addirt man beide Gleichungen, so folgt:

$$2\, H \left(\frac{1}{\sin 2\, i''} + \frac{1}{\sin 2\, i'}\right) = 2\, T \left(\frac{\cos i''}{\sin 2\, i''} + \frac{\cos i'}{\sin 2\, i'}\right);$$

daher ist

$$H = \frac{T\,(\cos i' \sin 2i'' + \cos i'' \sin 2i')}{\sin 2i'' + \sin 2i'} =$$

$$= \frac{2\,T \cos i' \cos i'' \sin\left(\frac{i''+i'}{2}\right) \cos\left(\frac{i''-i'}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{i''+i'}{2}\right) \sin\left(\frac{i''+i'}{2}\right) \cos\,(i''-i')} =$$

$$= \frac{T \cos i' \cos i'' \cos\left(\frac{i''-i'}{2}\right)}{\cos\,(i''-i) \cos\left(\frac{i''+i'}{2}\right)}.$$

Da aber $H = T \cos i$ ist, so folgt

$$\cos i = \frac{\cos i' \cos i'' \cos\left(\frac{i''-i}{2}\right)}{\cos\,(i''-i) \cos\left(\frac{i''+i'}{2}\right)} \tag{11}$$

Nimmt man hier $i' = i''$ an, so wird $\cos i = \frac{\cos^2 i'}{\cos i'} = \cos i'$, also $i = i'$, d. h. dann ist das Resultat frei vom oben erwähnten Fehler.

Durch Subtraction der obigen Gleichungen erhält man

$$\frac{\pi}{T} = -\frac{\sin \frac{i''-i}{2}}{\cos\left(\frac{i''+i}{2}\right) \cos\,(i''-i')}.$$

In dem „Entwurfe eines meteorologischen Beobachtungssystems" findet sich folgende, vom Herrn Director der meteorologischen Reichsanstalt an einem Repsoldischen Inclinatorium angestellte Beobachtung der Inclination zu Prag, für die Lagen Ost und West des Kreises bei entgegengesetzten Magnetismen:

Magnetismus *A*.	Kreis Ost.	Kreis West.	Magnetismus *B*.	Kreis Ost.	Kreis West.
1. Lage . . .	44° 59′	93° 1′	1. Lage . . .	47° 12′	94° 50′
2. Lage . . .	47 1	95 5	2. Lage . . .	45 17	92 42;

hieraus ergibt sich $i' = 65°\,58'\,30''$ für den Magnetismus *A*, $i'' = 66°\,14'\,15''$ für *B*, berechnet man die Inclination nach obiger Formel, so findet man $i' = 66°\,6'.0$, während das Mittel mehrerer anderer Versuche $66°\,4'.5$ ergab. Ebenso kann man $\frac{\pi}{T} = -0.0056554$ oder nahezu $1/_{6000}$ der Intensität des Erdmagnetismus aus den gegebenen Werthen finden. Diese Werthe zeigen, wie genau die Nadel äquilibrirt war, so wie dass ein viel grösserer Nachtheil von der Reibung an den Axen, als von der Überwucht bei so genau

gearbeiteten Instrumenten zu besorgen ist, denn im Mittel gibt bei verschiedenen Magnetismen die Ablesung nur eine Differenz von 14'.5 und 17'.0 Minuten, hingegen bei denselben Magnetismen von 2°2', also nahezu achtmal so viel; daher der Einfluss der Reibung ein viel bedeutenderer ist, als jener der Überwucht. Darin liegt ein Vortheil der vorstehenden Methode, der gewiss sehr richtig ist, denn an der Sinus- und Tangentenboussole eliminirt sich die Reibung, da sie jede Kraft nach constantem Verhältnisse schwächt, von selbst, und lässt die Formeln ganz ungeändert, während an Inclinatorien noch kein Mittel zu Gebote steht, sie zu beseitigen oder die Resultate von ihr zu befreien.

Auch hier kann man durch Vorversuche $\frac{\pi}{T}$ ausmitteln, und für jeden weiteren Versuch in Rechnung bringen nach der Formel:

$$\cos i = \cos i' \mp \frac{\pi}{T} \frac{\sin 2i'}{2},$$

wo das obere Zeichen für den Fall gilt, dass das schwerere Nadelende nach unten gerichtet ist. Die Correction $\frac{\pi}{T}$ erreicht ihr Maximum für $i'' = 45^{0}$, wo sie $\frac{\pi}{2T}$ wird, und hat zwei Minima für $i' = 0$ und $i' = 90^{0}$, indem im ersten Falle die horizontale Componente der Überwucht verschwindet, daher der Einfluss auf die horizontale Componente des Erdmagnetismus Null werden muss, im zweiten Falle hingegen steht die Nadel senkrecht, und die Überwucht wird durch den Widerstand der Axe gänzlich aufgehoben.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen ist sonach nachgewiesen, dass die Fehler der Ablesung und Einstellung, wenigstens für unsere Gegenden sich leicht innerhalb der Grenzen von 4—5″ erhalten lassen, dass der Einfluss der Reibung auf die Endresultate nicht wirken könne, und jene der Überwucht durch Vorversuche sich ausmitteln lässt, die es unnöthig erscheinen lassen den Nadelmagnetismus bei jeder Beobachtung umzukehren, indem man durch Vorversuche leicht die Grösse der Correction

$$\frac{p}{V} \frac{tg.\frac{\alpha'-\alpha}{2} \cot\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} \text{ und } \frac{p}{V} \frac{\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}}{\sin\alpha \cos\alpha'},$$

für die Sinus- und Tangenten-Boussole mit $\frac{\alpha'+\alpha}{2}$ als Argument in eine Tafel bringen kann; da diese Werthe sehr klein und wenig von

einander verschieden sein werden, so wird eine Tafel von 10 zu 10 Grad genügen; in den meisten Fällen wird man aber diese Correction nur einmal ausmitteln, und für alle Werthe von α und α' als constant annehmen können. Zu den ebenerwähnten Vorzügen der Methode kömmt noch der hinzu, dass dieser Doppelversuch so schnell ausgeführt werden kann, dass weder Änderungen der Temperatur und der Stromstärke noch des Erdmagnetismus selbst einen merklichen Einfluss auf das Resultat werden ausüben können.

6.

Es erübrigt nur noch die Art der Einrichtung solcher Boussolen, welche möglichst einfach und zweckentsprechend wäre, zu betrachten. Jede Tangentenboussole wird sich leicht in eine solche Doppelboussole umändern lassen, wenn man ihren Ring so einrichtet, dass er sich senkrecht auf seinen Horizontaldurchmesser umlegen lässt, so dass derjenige Durchmesser des Kreisringes, welcher horizontal lag, vertical abwärts zu stehen kömmt, wodurch zugleich die im Mittelpunkte des Kreisringes liegende Nadel so gestellt wird, dass ihre Bewegungsebene senkrecht auf die Meridiane und Kreisringsebene zu stehen kömmt. Um Fehler in der Einstellung leicht zu bemerken, ist es gut eine Vorrichtung anzubringen, um den Strom, ohne die am bequemsten aus elastischen Schnüren gebildete Leitung unterbrechen zu müssen, leicht umkehren zu können. Ist die Nadel richtig im Meridiane eingestellt, so wird der Ausschlag beiderseits gleich gross, und das arithmetische Mittel beider Ablesungen wird den Einfluss kleiner Abweichungen vermindern. Auch könnte man statt der wenig genauen Kreisablesung, die Scalenablesung in Anwendung bringen, nur muss die Nadel dann einen Spiegel tragen, und die Ablenkungswinkel können dann nicht sehr gross genommen werden, weil sonst die Scala eine unbequeme Länge erhalten müsste. Die Sinusboussole eignet sich zu dieser Umgestaltung viel weniger, und ist bei weitem nicht so bequem zu handhaben; aus diesem Grunde, und weil sie in Bezug auf die Änderungen durch Beobachtungsfehler nach Obigem weniger als die Tangentenboussole leistet, wird es genügen bei diesem Instrumente stehen zu bleiben, und lieber durch Vergrösserung der Empfindlichkeit und Verkleinerung der Nadellänge dem Resultate die möglichste Genauigkeit zu geben.